

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ο.π με εσωτερικό γινόμενο

Έστω $T: V \rightarrow V$ γραμμική. Η T ονομάζεται **ισομερία** αν ισχύει

$$\langle T(u), T(v) \rangle = \langle u, v \rangle \quad \forall u, v \in V$$

Αποδεικνύεται ότι T ισομερία $\iff \|T(u)\| = \|u\| \quad \forall u \in V$

Έστω P ορθογώνιος πίνακας 2×2

Ορίζεται την απεικόνιση $g: \mathbb{R}^{1 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{1 \times 2}$

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 \quad \text{με} \quad \text{ώστε} \quad g((x, y)) = (x, y)P$$

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$$

Επότε δείξτε ότι τα τετράδια απεικόνισης είναι γραμμικά

Η g είναι ισομερία.

Απόδειξη

Έστω ζυγό $(x, y) \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$

$$P = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{pmatrix}$$

$$g((x, y)) = (x, y) \cdot P$$

$$(x \ y) P = (x \ y) \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{pmatrix} = (p_1 x + p_3 y \quad p_2 x + p_4 y)$$

$$\|(x \ y) P\|^2 = \|(p_1 x + p_3 y \quad p_2 x + p_4 y)\|^2 =$$

$$= |p_1 x + p_3 y|^2 + |p_2 x + p_4 y|^2 = p_1^2 x^2 + p_3^2 y^2 + 2p_1 p_3 xy + p_2^2 x^2 + p_4^2 y^2 + 2p_2 p_4 xy =$$

$$= (p_1^2 + p_2^2) x^2 + (p_3^2 + p_4^2) y^2 + 2(p_1 p_3 + p_2 p_4) xy = x^2 + y^2 = \|(x \ y)\|^2$$

Λητάδι $\|g(x, y)\|^2 = \|(x, y)\|^2 \Rightarrow \|g(x, y)\| = \|(x, y)\| \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

Άρα η g είναι ισομετρία.

Τετραγωνικές μορφές

Έστω $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ δ.π με εσωτερικό γινόμενο Σιλοβανς 2.

Έστω $\beta = \{u_1, u_2\}$ να είναι μια ορθοκανονική βάση του V

Θαυμάσει $a, b, c \in \mathbb{R} \quad b \neq 0$

Με βάση τα παραπάνω ορίζουμε την απεικόνιση q

$q_{a,b} : V \rightarrow \mathbb{R}$ με $q_{a,b}(u) =$

Έστω u τυχόν με $u \in V$. Έστω $u = xu_1 + yu_2$ η μοναδική γραφή του u ως προς την β .

Ορίζεται $q_{A,\beta}(u) = q_{A,\beta}(xu_1 + yu_2) := ax^2 + bxy + \beta y^2$

Ισχύει ότι $u = xu_1 + yu_2 \quad // \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$(q_{A,\beta}(u)) = (x \ y) \cdot A \cdot (x \ y)^T \quad \forall (x \ y) \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$$

Απόδειξη

(προσυντεταγμένες
στοιχείων (x,y))

$$(x \ y) A = (x \ y) \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & \beta \end{pmatrix} = (ax + \frac{b}{2}y \quad \frac{b}{2}x + \beta y)$$

οπότε $(x \ y) \cdot A \cdot (x \ y)^T = (ax + \frac{b}{2}y \quad \frac{b}{2}x + \beta y) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$

$$= (x(ax + \frac{b}{2}y) + y(\frac{b}{2}x + \beta y)) = (ax^2 + bxy + \beta y^2) = (q_{A,\beta}(u))$$

Ο A είναι ο μοναδικός ^{αλγεβρικός} πίνακας για τον οποίο ισχύει:

$$(q_{A,\beta}(xu_1 + yu_2)) = (x \ y) A (x \ y)^T \quad \forall (x \ y) \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$$

Έστω ότι $I B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix}$ ^{αλγεβρικός} πίνακας ώστε B διαφέρει ^{από} A .

$$(q_{A,\beta}(xu_1 + yu_2)) = (x \ y) B (x \ y)^T \quad \forall (x \ y) \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$$

$$\text{Für } (x, y) = (1, 0) \Rightarrow \underline{a = b_1}$$

$$\text{Für } (x, y) = (0, 1) \Rightarrow \underline{b = b_2}$$

$$\text{Für } (x, y) = (1, 1) \Rightarrow a + b + c = b_1 + b_2 + b_3 \Rightarrow \underline{c = b_3}$$

$$\text{Zwangs } \boxed{A = B}$$

BEWEISE

$$1) \quad AA^{-1} = I$$

$$2) \quad (A^t)^t = A$$

$$3) \quad (AB)^t = B^t A^t$$

$$q_{A, \beta} \quad V \rightarrow \mathbb{R} \quad \beta = \{u_1, u_2\}$$

$$q_{A, \beta} (xu_1 + yu_2) = (x, y) A (x, y)^t \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^{(1,2)}$$

$$q_{A, \beta} (xu_1 + yu_2) = ax^2 + bxy + cy^2$$

$$(x, y) A (x, y)^t = (x, y) I \cdot A \cdot I (x, y)^t = \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= (x, y) \cdot P^{-1} \cdot P \cdot A \cdot P^{-1} \cdot P (x, y)^t =$$

$$= \left((x, y) P^{-1} \right) \cdot (P A P^{-1}) \cdot \left(P (x, y)^t \right) =$$

$$= ((x, y) P^{-1}) \Delta ((P^t)^t (x, y)^t) =$$

$$= ((x, y) P^{-1}) \Delta ((x, y) P^t)^t \stackrel{*}{=} ((x, y) \cdot P^{-1}) \Delta ((x, y) \cdot P^{-1})^t$$

$$* P \text{ ορθογώνια} \Rightarrow P^{-1} = P^t$$

Ορίζουμε την $g: \mathbb{R}^{1 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{1 \times 2}$ με τρόπο $g((x, y)) = (x, y) P^{-1}$

Η g είναι ισομετρία $\left(P \text{ ορθογώνια} \Rightarrow P^{-1} \text{ ορθογώνια} \right)$ $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$

$$\text{Αρα: } q_{A, B} (x u_1 + y u_2) = q_{A, B} (g_1(x, y) u_1 + g_2(x, y) u_2)$$

$$\text{με } g_1(x, y) = \overset{\text{πρώτη συνιστώσα}}{P_{x_1}} (g(x, y))$$

$$g_2(x, y) = P_{x_2} (g(x, y))$$

$$\text{με } P_{x_1}: \mathbb{R}^{1 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$P_{x_2}: \mathbb{R}^{1 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$P_{x_1}(x, y) = x \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$$

$$P_{x_2}(x, y) = y \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$$

$$g(x, y) \Delta (g(x, y))^t =$$

$$(g_1(x, y) \quad g_2(x, y)) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} (g_1(x, y) \quad g_2(x, y))^t =$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 g_1(x, y) & \lambda_2 g_2(x, y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1(x, y) \\ g_2(x, y) \end{pmatrix} =$$

$$= \lambda_1 (g_1(x, y))^2 + \lambda_2 (g_2(x, y))^2$$

Apa adalah epurbe :

$$\boxed{ax^2 + bxy + cy^2 = \lambda_1 (g_1(x, y))^2 + \lambda_2 (g_2(x, y))^2} \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$$

now $g(x, y) = (g_1(x, y), g_2(x, y)) \quad g: \mathbb{R}^{1 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{1 \times 2}$

$$g(x, y) = (x, y) P^{-1} \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$$

car λ_1, λ_2 diberikan car $A = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}$

$$P = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \xrightarrow{\lambda_1} \\ \xrightarrow{\lambda_2} \end{matrix}$$

~~if $\delta \neq 0$~~ $V, \langle \cdot, \cdot \rangle \rightarrow \delta \cdot X$

$$T: V \rightarrow \mathbb{R}$$

T adalah operator linier

$\exists$ μοναδικό διάνυσμα $a \in V$

$$\tau(u) = \langle a, u \rangle \quad \forall u \in V$$

ΘΕΩΡΗΜΑ RIESSE
~~ΠΡΟΤΥΠΟ~~

$$f(x, y) = ax + by \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}$$

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(e_1) = f(1, 0) = a$$

$$f(e_2) = f(0, 1) = b$$

$$f(x, y) = f((x, 0) + (0, y)) = f(x(1, 0) + y(0, 1)) =$$

$$= f(xe_1 + ye_2) \stackrel{\text{γραμμικότητα}}{=} f(xe_1) + f(ye_2) \stackrel{\text{γραμμικότητα}}{=} xf(e_1) + yf(e_2) =$$

$$= ax + by$$

$$f(x, y, z) = ax + by + cz$$

Το ίδιο για το $\mathbb{R}^n$ $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ γραμμική

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$a_i = f(e_i) \quad \forall i=1, 2, \dots, n \quad \langle = \langle a_1, a_2, \dots, a_n, (x_1, x_2, \dots, x_n) \rangle$$

~~$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (y_1, y_2, \dots, y_m)$~~

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \quad \text{γραμμική}$$

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (y_1, y_2, \dots, y_m)$$

$$g_i = f_i(x_1, \dots, x_n)$$

$$Pr_i: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R} \quad Pr_i(x_1, x_2, \dots, x_4) = x_i \quad \forall i=1, \dots, 4$$

Οι Pr_i είναι πραγματικές άρα και οι f_i πραγματικές ~~αυτές~~

$$\text{όπου } f_i: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R} \quad f_i = p_{r_i} \circ P \quad \forall i=1, 2, \dots, 4$$

Σε όλες
οχι σωστός

$$f(x_1, x_2, \dots, x_4) = (q_1^{(1)} x_1 + q_2^{(1)} x_2 + \dots + q_n^{(1)} x_n, q_1^{(2)} x_1 + q_2^{(2)} x_2 + \dots + q_n^{(2)} x_n, \dots,$$

Γιατί ίσως

$$, q_1^{(4)} x_1 + q_2^{(4)} x_2 + \dots + q_n^{(4)} x_n)$$

$$\forall (x_1, x_2, \dots, x_4) \in \mathbb{R}^4$$

Έστω $g: \mathbb{R}^{1 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}$ απεικόνιση με $g = (g_1, g_2)$ και $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$

και έχουμε αδρότητα $g_1(x, y) a_0 + g_2(x, y) b_0 = f(x, y)$

$$\text{με } f: \mathbb{R}^{1 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}$$

Τότε υπάρχει μια μοναδική πραγματική απεικόνιση $T: \mathbb{R}^{1 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\text{με τιμή } T(x, y) = f_0 x + g_0 y \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Οι ερωτήσεις είναι $T = f$

Απόδειξη

Έστω ότι ισχύει $T = f$

$$g_1(x, y) a_0 + g_2(x, y) b_0 = f(x, y)$$

~~$$g_1(1,0)a_0 + g_2(1,0)b_0 = j_0$$

$$g_1(0,1)a_0 + g_2(0,1)b_0 = \delta_0$$~~

Θεωρώ την συνάρτηση $T(x,y) = j_0 x + \delta_0 y$

Θεωρώ την $g: \mathbb{R}^{1 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{1 \times 2}$ γραμμική ~~και~~ γραμμική.

Φαίνεται να έχω ως συντελεστές $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$:

$$a_0 g_1(x,y) + b_0 g_2(x,y) = j_0 x + \delta_0 y \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$$

$$\text{όπου } g(x,y) = \begin{pmatrix} g_1(x,y) & g_2(x,y) \end{pmatrix} \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$$

Υποθέτουμε ότι ισχύει η (1). Εφαρμόζουμε την (1) για τα μοναδιαία διανύσματα $(1,0)$ και $(0,1)$ και έχω:

$$a_0 g_1(1,0) + b_0 g_2(1,0) = j_0 \quad (1)$$

$$a_0 g_1(0,1) + b_0 g_2(0,1) = \delta_0 \quad (2)$$

Υποθέτουμε ότι g είναι αντιστρέψιμη 1-1 και δίνω ως παραπάνω είσοδο ~~α~~ για να έχω a_0, b_0

Πολύ πιο εύκολο να βρω x και y και έχω:

$$a_0 g_1(1,0)x + b_0 g_2(1,0)x = j_0 x$$

$$a_0 g_1(0,1)y + b_0 g_2(0,1)y = \delta_0 y$$

$$\Rightarrow a_0 (g_1(1,0)x + g_1(0,1)y) + b_0 (g_2(1,0)x + g_2(0,1)y) = j_0 x + \delta_0 y$$

(3)

$$\Leftrightarrow a_0(g_1(x,y)) + b_0(g_2(x,y)) = p_0 x + \delta_0 y \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$$

$$\text{αρα } g_1(x,y) = g_1(1,0)x + g_1(0,1)y$$

$$\text{και } g_2(x,y) = g_2(1,0)x + g_2(0,1)y$$

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + 2 = 0$$

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^{1 \times 2} \mid Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + 2 = 0\}$$

Θεωρούμε την τετραγωνική μορφή $q_A : \mathbb{R}^{1 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\text{με πίνακα } A = \begin{pmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{pmatrix} \quad q_A(x,y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2$$

Βρίσκουμε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A

Έστω λ_1, λ_2 οι ιδιοτιμές ($\lambda_1 \neq \lambda_2$)

Ορίζουμε $P = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{pmatrix}$ ο ορθογώνιος πίνακας με ιδιοδιανύσματα

τα $(p_1, p_2), (p_3, p_4)$

Ορίζουμε την $g: \mathbb{R}^{1 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{1 \times 2}$ με άνω $g(x,y) = (x,y) \cdot P^T \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$

$$g(x,y) = (g_1(x,y) \quad g_2(x,y)) \quad g_1, g_2: \mathbb{R}^{1 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}$$

Τότε από τα προηγούμενα έχουμε

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = \Delta_1 (g_1(x,y))^2 + \Delta_2 (g_2(x,y))^2 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$$

Επίσης από πριν έχουμε τα $\beta_0, \delta_0 \in \mathbb{R}$.

$$g_1(x,y)\beta_0 + g_2(x,y)\delta_0 = \Delta x + \Delta y \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$$

Από τις (1) και (2) με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + \Delta x + \Delta y = \Delta_1 (g_1(x,y))^2 + \Delta_2 (g_2(x,y))^2 + \beta_0 g_1(x,y) + \delta_0 g_2(x,y)$$

$$C' = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^{1 \times 2} \mid \Delta_1 x^2 + \Delta_2 y^2 + \beta_0 x + \delta_0 y + 2 = 0 \}$$

$$g: \mathbb{R}^{1 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{1 \times 2}$$

$$g^{-1}(C') = C'' \quad \left(P \text{ ορθ.} \Rightarrow P^{-1} \text{ ορθ.}, g \text{ ισομ. } \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \Rightarrow g^{-1} \text{ ορ. } \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \right)$$

$$\text{Έστω } (x,y) \in g^{-1}(C') \Rightarrow g(x,y) \in C' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (g_1(x,y), g_2(x,y)) \in C'$$

$$\text{Άρα } \Delta_1 (g_1(x,y))^2 + \Delta_2 (g_2(x,y))^2 + \beta_0 g_1(x,y) + \delta_0 g_2(x,y) + 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Ax^2 + Bxy + Cy^2 + \Delta x + \Delta y + 2 = 0 \Rightarrow (x,y) \in C$$

Συνεπώς $g^{-1}(C') \subseteq C$

ομοίως μπορεί να αποδειχθεί ότι $C \subseteq g^{-1}(C')$

Οπότε $\boxed{g^{-1}(C') = C}$

$$t_{c_0}: \mathbb{R}^{1 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{1 \times 2}, \quad t_{c_0}(v) = c_0 + v \quad \forall v \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$$

έστω $c_0 = (c_1, c_2)$

αυ $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : ax^2 + by^2 + \gamma x + \delta y + \varepsilon = 0\}$

$v \in t_{c_0}(C)$ άρα $v = c_0 + u, \quad u \in C$

$v = t_{c_0}(u), \quad u \in C$

(Συνάγει στο επόμενο ηαδύτηα)